II-1 Définition

Champ de scalaires: C'est une fonction scalaire de plusieurs variables qui à chaque point M de l'espace fait correspondre un scalaire U(x, y, z).

Exemple: Température en chaque point d'une pièce.

Champ de vecteurs: C'est une fonction vectorielle de plusieurs variables qui à chaque point M de l'espace fait correspondre un vecteur $\vec{V}(x, y, z)$

Exemple: Champ électrique.

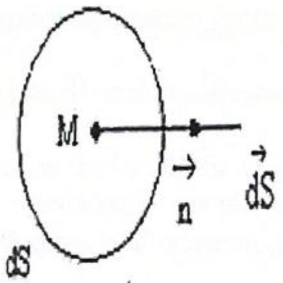
II-2 Flux d'un champ de vecteur

II-2-1 Orientation d'une surface

On représente vectoriellement un élément de surface dS autour d'un point M par un vecteur dont:

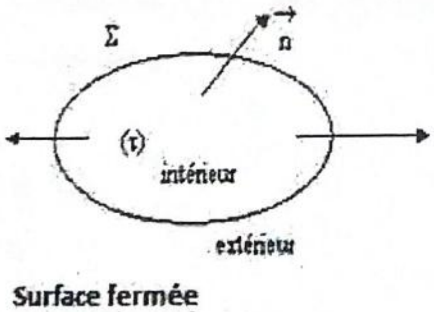
- La valeur est l'aire dS
- La direction est la normale à l'élément dS en M
- Le sens positif choisi est repéré par un vecteur unitaire porté par cette normale et dépend de la configuration de la surface considérée. Le vecteur élément de surface orientée s'écrit:

$$\overrightarrow{ds} = ds.\vec{n}$$

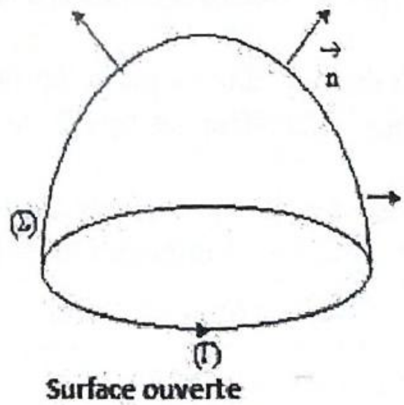


Pour une surface fermée $\sum$ délimitant un volume τ, $\vec{n}$ est orienté très souvent de l'intérieur vers l'extérieur.

Pour une surface ouverte, on choisit un sens de parcours du contour et on oriente la normale en utilisant par exemple la règle de la main droite : Le pouce donne le sens de la normale si les autres doigts sont fermés dans le sens de parcours du contour.



Surface fermée



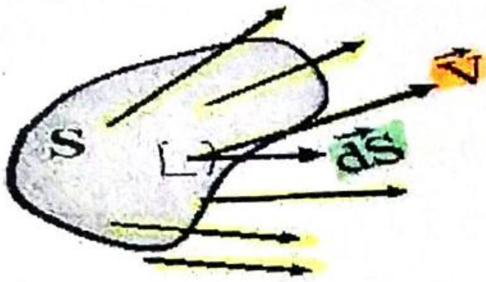
Surface ouverte

II-2-2 flux d'un vecteur

Le flux Φ d'un champ de vecteur $\vec{V}$ à travers la surface S est donné par l'intégrale sur toute la surface S du produit scalaire de $\vec{V}$ avec le vecteur $\overrightarrow{dS}$ représentant un élément de surface infinitésimal: $\phi = \iint_S \vec{V}.\overrightarrow{dS}$

La somme des volumes est exprimée par "$\iint$"

La surface pourra-t-elle également exprimée par "Σ"



$\overrightarrow{dS} = dS.\vec{n}$

$\overrightarrow{dS}$ colinéaire à la normale

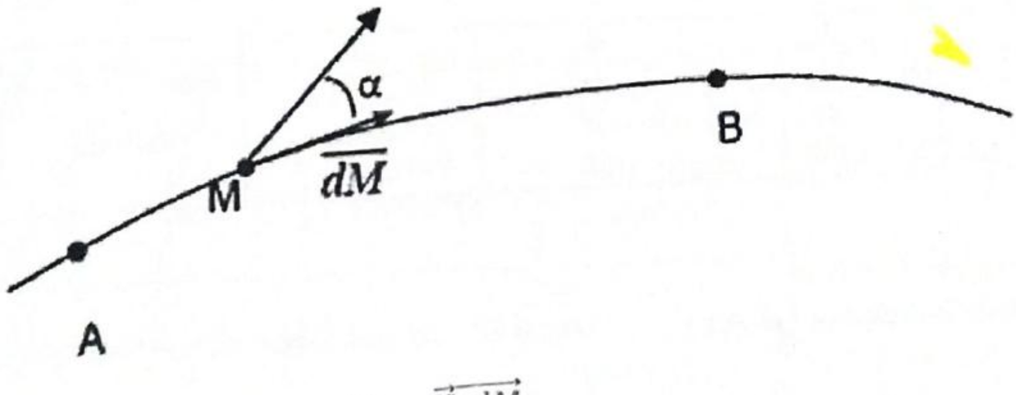
II-3 Circulation d'un vecteur

II-3-1 Définition

Soit un arc AB sur une courbe C parcouru par un point M dans un certain sens. Soit $\vec{V}$ un vecteur. On appelle circulation du vecteur $\vec{V}$ le long de l'arc AB la valeur de l'intégrale curviligne $\int_A^B \vec{V}\overrightarrow{dM}$

$\overrightarrow{dM}$: est le vecteur tangent à la courbe C au point M.

Si le chemin est fermé: la circulation du vecteur $\vec{V}$ est $C = \oint \vec{V}.\overrightarrow{dM}$



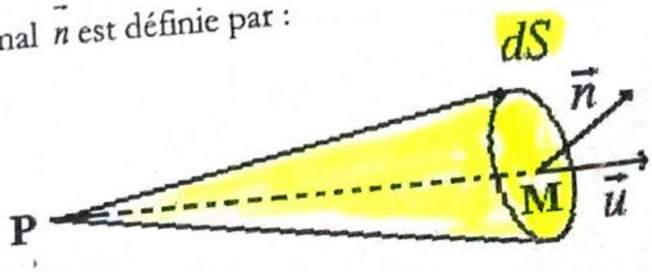
- Circulation élémentaire $dC = \vec{V}.\overrightarrow{dM}$

Par exemple, si le vecteur est une force, la circulation n'est autre que le travail.

II-4 Angle Solide

La notion d'angle solide est **l'extension naturelle** dans **l'espace** de **l'angle** défini dans un **plan.** **L'angle solide élémentaire** noté $d\Omega$ sous lequel, depuis un point P, on voit **l'élément de surface** dS entourant un point M, d'unitaire normal $\vec{n}$ est définie par :

$$d\Omega = \frac{\vec{u}.\vec{n}}{r^2}.dS$$



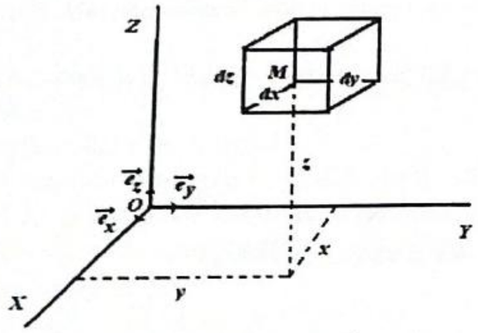
r est la distance entre les deux points P et M.
Ainsi l'angle solide Ω sous lequel, depuis P, on voit la surface (Σ) est :

$$\Omega = \iint_{\Sigma} d\Omega = \iint_{\Sigma} \frac{\vec{u}.\vec{n}}{r^2}.dS$$

L'angle solide est exprimé en **stéradian** noté **(sr).**

III. Systèmes de coordonnées

III.1. Coordonnée cartésiennes (x,y,z)

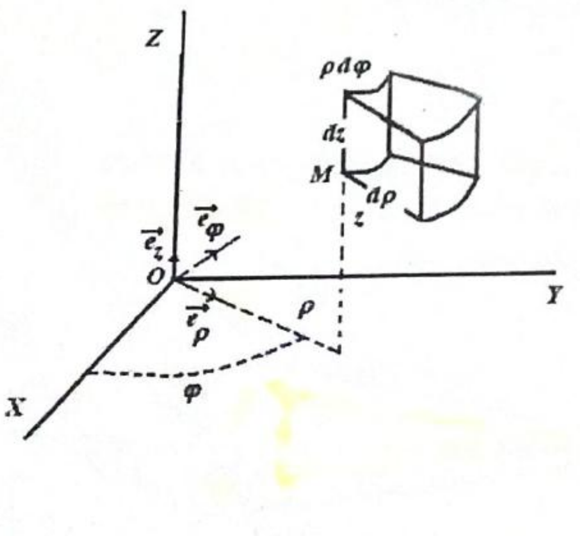


Les axes sont perpendiculaires et portent les vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

Le tableau regroupe les coordonnées q d'un point M, leurs accroissements dq, les longueurs (dl), surfaces (dS) et volumes élémentaires $(d\tau)$ ainsi que les vecteurs unitaires $\vec{e}$

q	dq	dl	dS	$d\tau$
x y z	dx dy dz	dx dy dz	dydz dxdz dxdy	dxdydz

III.2. Coordonnée cylindriques (ρ, φ, z)



Les vecteurs unitaires des trois directions sont $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$

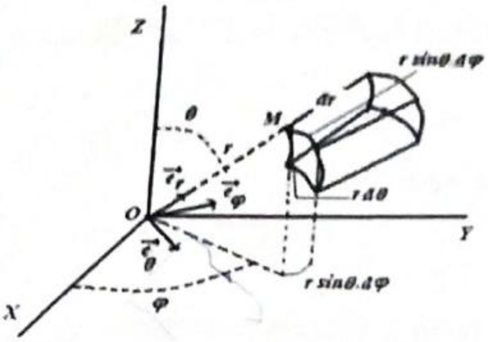
q	dq	dl	dS	$d\tau$
ρ φ z	$d\rho$ $d\varphi$ dz	$d\rho$ $\rho d\varphi$ dz	$\rho d\varphi dz$ $dz d\rho$ $\rho d\varphi d\rho$	$\rho d\varphi d\rho dz$

Le passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes se fait selon la transformation suivante :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

Avec φ variant entre 0 et 2π.

III.3. Coordonnée sphériques (r, ϑ, φ)



Les vecteurs unitaires des trois directions sont $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$

q	dq	dl	dS	$d\tau$
r ϑ φ	dr $d\vartheta$ $d\varphi$	dr $rd\vartheta$ $r\sin\vartheta\, d\varphi$	$r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ $r\sin\vartheta\, d\varphi\, dr$ $r\, dr\, d\vartheta$	$r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$

Le passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes se fait selon la transformation suivante :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Avec θ variant entre 0 et π et φ variant entre 0 et 2π.

III-4 Exemples d'application (calcule des surfaces et des volumes).

1- La circonférence (le périmètre) d'un disque de rayon R.

Le système de coordonnées le mieux adapté à cette géométrie est le système de coordonnées polaire (ρ, θ). Alors, un élément de longueur du périmètre dl s'écrit :

$$dl = Rd\theta$$

La circonférence L est la somme de tous les éléments de longueur dl

$$\boxed{L = \int dl = \int_0^{2\pi} Rd\theta = R[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi R}$$

تصف الجامعي
لتشغيل الذاتي
INDH

2- La surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h.

Le système de coordonnées le mieux adapté à cette géométrie est le système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z). Alors, un élément de surface dS s'écrit :

$$dS = \rho d\theta . dz \quad \text{avec} \quad \rho = R = cte$$

La surface latérale S_{lat} est la somme de tous les éléments de surface dS :

$$S_{lat} = \iint dS = \iint R d\theta . dz$$

Avec θ variant entre 0 et 2π, z variant entre 0 et h. Donc :

$$S_{lat} = R \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^h dz = R[\theta]_0^{2\pi} . [z]_0^h = \boldsymbol{2\pi R h}$$

3- Le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h.

Le système de coordonnées le mieux adapté à cette géométrie est le système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z). Alors, un élément de volume $d\tau$ s'écrit :

$$d\tau = \rho d\rho . d\theta . dz$$

Le volume V est la somme de tous les éléments de volume $d\tau$: $V = \iiint d\tau$

$$V = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^h dz = [\rho^2/2]_0^R . [\theta]_0^{2\pi} . [z]_0^h = \boldsymbol{\pi R^2 h}$$

IV. Opérateurs

Soit $\vec{A}$ un **vecteur** et f une **fonction scalaire**, les opérateurs **gradient, divergence, rationnel, laplacien et laplacien vectoriel** leur font correspondre des grandeurs **vectorielles ou scalaires :**

Gradient : Le gradient **d'une fonction scalaire** noté $\overrightarrow{grad}(f)$ **est un vecteur** qui a pour coordonnées cartésien

$$\overrightarrow{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Laplacien : Le laplacien **d'une fonction scalaire** noté Δf **est un scalaire**

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Divergence : La divergence **d'un vecteur** noté $div(\vec{A})$ **est un scalaire**

$$div(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotationnel : Le rotationnel **d'un vecteur** noté $\overrightarrow{rot}(\vec{A})$ **est un vecteur** qui a pour coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\end{pmatrix}$$

Laplacien vectoriell : Le Laplacien vectoriel **d'un vecteur** noté $\vec{\Delta}(\vec{A})$ **est un vecteur** qui a pour coordonnées cartésiennes

$$\vec{\Delta}(\vec{A})=\begin{pmatrix}\Delta A_x\\ \Delta A_y\\ \Delta A_z\end{pmatrix}$$

IV.1. Opérateurs nabla

L'opérateur nabla noté $\vec{\nabla}$ est un pseudo-vecteur de composantes

$$\vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$$

Facilite l'écriture des différents opérateurs ainsi : $\overrightarrow{grad}(f)=\vec{\nabla}f$, $\Delta f=\vec{\nabla}^2 f$, $div(\vec{A})=\vec{\nabla}.\vec{A}$, $\overrightarrow{rot}(\vec{A})=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ et $\vec{\Delta}(\vec{A})=\vec{\nabla}^2\vec{A}$

IV.2. Relations entre opérateurs

$$df=\overrightarrow{grad}(f)\vec{dl}$$

$$div\,\overrightarrow{rot}(\vec{A})=0$$

$$\overrightarrow{grad}(fg)=g.\overrightarrow{grad}(f)+f.\overrightarrow{grad}(g)$$

$$\overrightarrow{rot}(f\vec{A})=\overrightarrow{grad}(f)\wedge\vec{A}+f.\overrightarrow{rot}(\vec{A})$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(f))=\vec{0}$$

$$div(\overrightarrow{grad}(f))=\Delta f$$

$$div(f.\vec{A})=\overrightarrow{grad}(f).\vec{A}+f.div(\vec{A})$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{A}))=\overrightarrow{grad}(div(\vec{A}))-\Delta\vec{A}$$

V. Théorème de la divergence (d'Ostrogradski)

A condition que les composantes du vecteur et leurs dérivées soient continues dans les deux domaines d'intégration, le volume τ et la surface Σ qui le limite, on a :

$$\iint_{\Sigma}\vec{A}.d\vec{S}=\iiint_{\tau}div(\vec{A}).d\tau$$

VI. Théorème du rotationnel (de Stockes ou Ampère)

Avec les mêmes conditions que ceux du théorème d'Ostrogradsky sur la surface Σ et le contour C qui l'entoure on a :

$$\int_C\vec{A}.d\vec{l}=\iint_{\Sigma}\overrightarrow{rot}(\vec{A}).d\vec{S}$$

IV. Exercices d'application

Exercices 0.1.
Soient deux point $A(a,c,0)$ et $B(b,d,0)$ d'un référentiel $R(O;x,y,z)$ les quantités a, b, c et d sont des constantes positives. Un champ de vecteur $\overrightarrow{F} = -Kx\overrightarrow{e_x} + \frac{K'}{y^2}\overrightarrow{e_y}$, avec K et K' sont des constantes positives.

1. Calculer la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ dans le déplacement de :
   (a) $A(a,c,0)$ à $B(b,d,0)$;
   (b) $B(b,d,0)$ à $A(a,c,0)$;
   (c) Le long d'un contour fermé ABA;
2. Conclusion.

Exercices 0.2.
Soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{F} = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}$, $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$.

1. Déterminer la circulation de $\overrightarrow{F}$ le long de la courbe $r = a(1+cos\theta)$, lorsque θ passe de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$.

Exercices 0.3.
Calculer les dérivées partielles et le gradient de $f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1$ et $g(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.

Exercices 0.4.
On considère une fonction scalaire $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ et un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dr}$ tel que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{dr}) = \theta$.

1. Établir la relation $df = \overrightarrow{grad}f.\overrightarrow{dr}$;
2. Déduire de la premier question la fonction: $\frac{df}{dr}$.

Exercices 0.5.
On donne le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = \frac{\overrightarrow{e_r}}{r^2}$, $|\overrightarrow{e_r}| = 1$.

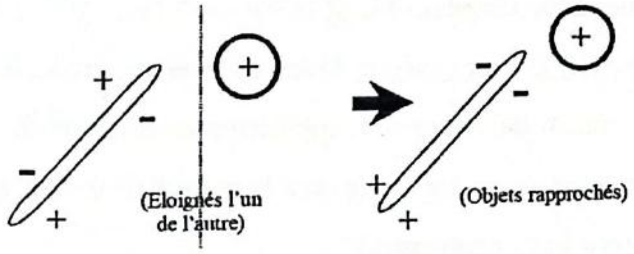
1. Montrer que $\overrightarrow{V}$ est un gradient;
2. Calculer la divergence de $\overrightarrow{V}$;
3. Calculer le rotationnel de $\overrightarrow{V}$.

Exercices 0.6.
Calculer le flux du champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ à travers la surface totale de l'hémisphère de rayon a: $\overrightarrow{V} = xz^2\overrightarrow{i} + (x^2y - z^3)\overrightarrow{j} + (y^2z + 2xy)\overrightarrow{k}$.
remarque : utiliser le théorème de la divergence.

Exercices 0.7.
Calculer la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = 2y\overrightarrow{i} + 3x\overrightarrow{j} - z^2\overrightarrow{k}$ le long du contour (C) sur lequel s'appuie l'hémisphère de rayon $R = 3$.
remarque : utiliser le théorème du rotationnel.

II.3.2 Electrisation par influence

En rapprochant une tige métallique neutre d'un objet possédant une charge positive sans les mettre en contact. Les électrons de la tige vont se déplacer en direction de l'objet électrisé, sans toutefois s'en échapper, ainsi une charge est *induite par influence* aux deux extrémités de la tige métallique.



II.4. La charge électrique

Le concept de charge électrique : Les résultats des expériences précédentes ont amené à introduire le concept de charge électrique, ils nous permettent d'énoncer la loi suivante :

Deux charges électriques de même signe positif ou négatif, se repoussent ; par contre elles s'attirent si elles sont de signes contraires.

Le concept de charge ponctuelle : Comme pour la masse, on introduit le concept de charge ponctuelle. C'est une charge dont les dimensions sont suffisamment petites par rapport aux distances d'observation pour être assimilée à un point géométrique.

III.1. Quantification de la charge électrique

La charge électrique est quantifié c-à-d une charge quelconque vaut toujours un nombre entier de fois (positif ou négatif) une certaine charge dite charge élémentaire notée **e (e>0).**

« e » est la charge portée par l'électron et le proton.

Electron, protons et neutrons :

- La matière est formée d'atomes (rayon ~ 10^{-10} *m*)
- L'atome est formé

- d'un noyau (rayon ~ 10^{-50} m)
- d'électrons de charge **−e**

- Le noyau est formé
  - de neutrons sans charge
  - de protons de charge **+e**

Remarque : l'atome est neutre, sa charge totale est la charge des protons + la charge des neutrons

$$Q = Ze + (-Ze) = 0$$

III.2. Propriétés de la charge électrique

1. L'unité de la charge électrique est le **Coulomb [C]**. Elle est : Soit **négative** ou **positive**
2. Elle est **en interaction uniquement avec les autres charges (attraction – répulsion-**
3. La charge d'un système est une grandeur **<u>extensive</u>**, c'est à dire qu'elle est la somme algébrique de toutes les charges constituant le système.

   Exemple : pour l'atome **d'hydrogène H,** $Q = +e - e = 0$.
4. La charge est une **<u>grandeur conservative</u>**. Dans un système isolé, il ne peut pas y avoir de création ou de destruction de charges. L'apparition de charges dans ce système ne peut être due qu'à l'extérieur. Une autre façon de dire la même chose est **que la charge totale contenue dans l'Univers est constante.**

III.3. Distribution continue de charge

A l'échelle **microscopique**, on peut décrire la matière comme un ensemble de particules, considérée comme **ponctuelles,** et possédant une **charge finie multiple** de la charge **élémentaire (e). La matière apparaît discontinue** et essentiellement formé de vide et la charge électrique dans ce cas est une **distribution discontinue.**

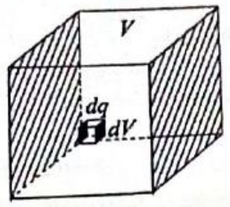
Mais cette description ne convienne pas pour décrire un objet **de taille macroscopique**. On ne voit plus le caractère **discret** de la répartition de la charge, mais seulement la charge totale par unité de volume, on parle dans ce cas de **distribution continue de charge**..

1- Charge volumique

Pour un milieu chargé de volume V, la distribution de charge est définie par la donnée de la ***densité de charge volumique*** $\rho(\vec{r}) = \rho(x, y, z)$.

Ainsi pour un élément de volume $d\tau$ autour d'un point M de coordonnée $M(x_M, y_M, z_M)$ on peut écrire :

$$dq = \rho d\tau = \rho(M)d\tau = \rho(x_M, y_M, z_M).d\tau$$



Et pour calculer la charge totale de ce volume il faut calculer l'intégral triple :

$$Q = \iiint \rho.d\tau$$

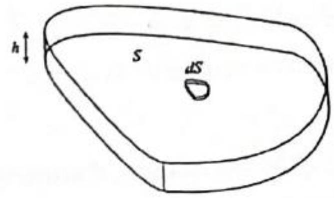
La densité de charge volumique s'exprime en **$C.m^{-3}$**

2- Charge surfacique

Pour un milieu chargé présentant l'aspect d'une **nappe (d'épaisseur négligeable)**, on parle de ***densité surfacique de charge*** **(ou charge surfacique)** notée $\sigma(\vec{r}) = \sigma(x, y)$.

Pour un élément de surface dS autour d'un point M de coordonnées $M(x_M, y_M)$ on peut écrire :

$$dq = \sigma dS = \sigma(M)dS = \sigma(x_M, y_M).dS$$



La charge totale est calculée par l'intégral double :

$$Q = \iint \sigma.dS$$

La densité surfacique de charge s'exprime en **$C.m^{-2}$**

3- Charge linéique

Pour un milieu chargé présentant l'aspect d'un fil de **diamètre négligeable**, on défini **la *densité linéique de charge*** (ou **charge linéique**) elle est souvent notée $\lambda(\vec{r}) = \lambda(x)$

Pour un élément de longueur dl autour d'un point M de coordonnée $M(x_M)$ on peut écrire :

$$dq = \lambda dl = \lambda(M)dl = \lambda(x_M).dl$$

La charge totale est calculée par l'intégral simple :

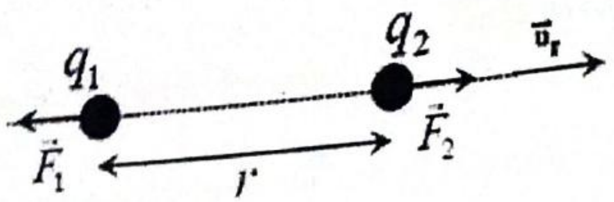
$$Q = \int \lambda.dl$$

La densité linéique de charge s'exprime en **$C.m^{-1}$**

IV. Force de Coulomb

IV.1 Loi de Coulomb

Nous avons vu à l'électrisation par influence que deux charges ponctuelles q_1 et q_2 exercent une influence mutuelle l'une sur l'autre. Cette force obéit à la **loi de coulomb** suivante :



Charles Augustin Coulomb
1736-1806

$$\boxed{\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r}$$

ε_0 est la permittivité de vide ($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\, SI$) ;

r la distance qui sépare les deux charges ;

$\vec{u}_r$ un vecteur unitaire orienté de la charge 1 vers la deuxième charge.

IV.2. Force de Coulomb et force d'attraction universelle

La force de gravitation joue un rôle fondamental dans la mécanique des **objets macroscopiques** et dans la dynamique céleste. Cependant, à **l'échelle atomique** et subatomique, la force de gravitation est **négligeable.**

A titre d'exemple, comparons les deux forces entre les deux points A(Q_A, M_A) et B(Q_B, M_B) :

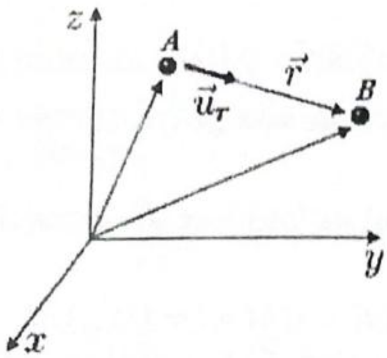
Les forces exercées en B :

Force de Coulomb

$$\vec{F}_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A Q_B}{r^2}\vec{u}_r$$

Force d'attraction universelle

$$\vec{F}_{Newton} = -G\frac{M_A M_B}{r^2}\vec{u}_r$$



- Les deux expressions sont de même type en $\frac{1}{r^2}$
- L'intensité de la force de Coulomb >>> l'intensité de la force d'attraction de Newton. Pour deux protons (1 placé en A et l'autre en B) :

$$\frac{\vec{F}_{Newton}}{\vec{F}_{Coulomb}} = \frac{GM^2_{Proton}4\pi\varepsilon_0}{e^2} \cong 10^{-33}$$

- Les forces de gravitation sont toujours attractives. Les charges peuvent avoir même signe ou signe contraire ; répulsion ou attraction.

Remarque : Le fait que les forces de gravitation sont toujours attractives permet aux masses de se concentrer en certains points de l'espace (terre, soleil, …). Les charges ne peuvent se concentrer :

- si de même signe ➔ répulsion
- si de signe contraire ➔ neutralisation

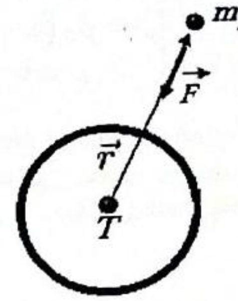
Action de force sur le mouvement.

- Force d'attraction de la terre sur une particule de masse m_p

$$\vec{F}_{Newton} = -G\frac{M_T m_p}{r^2}\vec{u}_r = m_p \vec{a}_{Newton}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a}_{Newton} = -\frac{GM_T}{r^2}\vec{u}_r \neq fonction(m_p)$$

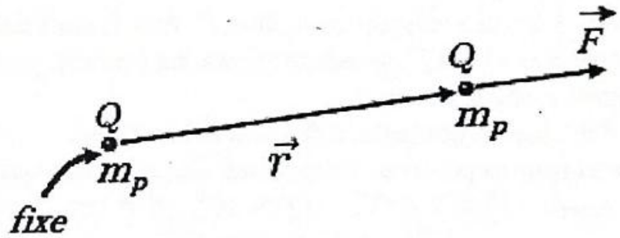


- Force de Coulomb entre 2 particules de masse m_p et de charge Q ; l'une fixe et l'autre en mouvement

$$\vec{F}_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}.\vec{u}_r = m_p.\vec{a}_{Coulomb}$$

$$\Downarrow$$

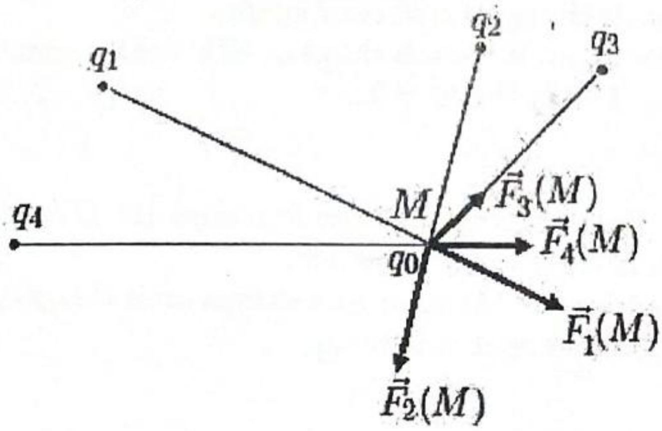
$$\vec{a}_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{m_p}.\frac{\vec{u}_r}{r^2} = fonction(m_p)$$



Contrairement au cas de la force de Newton, l'accélération dans le cas d'une interaction coulombienne dépend de la masse de la particule subissant l'effet de la force.

IV.3. Force de Coulomb : ensemble de charges ponctuelles

Soit un ensemble de charges immobiles $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$:



La force exercée sur la charge q_0 par la charge q_i est :

$$\vec{F}_{i0} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_{i0}^2}\vec{u}_{i0}$$

La force de Coulomb obéit au principe de superposition.

La force totale appliquée sur M par l'ensemble des charges $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$

V. Exercices d'application

Exercices I.1.

Soit une sphère de rayon $\boldsymbol{R}$ dont la distribution de charge volumique n'est pas uniforme

$$\begin{cases} \rho = \rho_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \; si\, r \leq R \\ \rho = 0 \;\; si\, r > R \end{cases} \quad \text{ou} \quad \rho_0 = Cte$$

1) Calculer la charge totale Q dans la sphère.
2) Calculer la charge totale Q_0 dans la sphère si $\rho = \rho_0$.
3) Donner le rapport Q/Q_0.

Exercice I.2.

Soit 3 charge positives et égales q , forment un triangle équilatérale de côté a , on place une charge $(q' < 0)$ au centre o de ce triangle.

Calculer $\vec{F}$ la force totale soumise par les trois charges q.

Exercice I.3.

Soient 3 boules identiques A, B et C. A et B sont fixes, distantes de d et portent des charges respectives Q et Q' de même signes. La boule C peut se déplacer librement sur la droite AB ; elle est initialement neutre.

On l'amène au contact de A et on l'abandonne.

Déterminer sa position d'équilibre. On admettra que les boules sont ponctuelles.

On donne : $Q = 2\ 10^{-8}$C, $Q' = 10^{-8}$, d = 1m

Exercice I.4.

Soit un fil de section négligeable en forme d'un cercle de centre O et de rayon R placé dans le plan (Oxy) porte une charge électrique répartie avec une densité linéique λ tel que

$\boldsymbol{\lambda = \lambda_0 sin\, \theta}$; $\boldsymbol{\lambda_0 = Cte > 0}$ et $\boldsymbol{\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})}$

P étant un point du cercle.

1) Est-ce que la distribution de charge est uniforme ? justifier.
2) Calculer la force totale exercé par le fil sur la charge $q_0 > 0$ placer au centre du fil.
3) Même question mais avec $\boldsymbol{\lambda = \lambda_0 = Cte > 0}$.

Exercice I.5.

Soit 4 charges +q, +2q, -2q et +2q placées aux sommets d'un carré ABCD de côté 2a avec q>0. Soit une charge $q_0>0$ placée au centre O du carré ABCD.

1) Représenter les forces les 4 forces exercée par les 4 charges sur la charge q_0.
2) Calculer le module de la force totale exercée sur q_0.

Exercice I.6.

Soit 4 charges q_1, Q_1, q_2 et Q_2 placées aux sommets d'un carré ABCD respectivement de côté a. On suppose que $q_1=q_2=q<0$, $Q_1=Q_2=Q>0$ q>0 et la force résultante agissante sur Q_1 est nulle.

1) Calculer et présenter $\overrightarrow{F_{Q_2Q_1}}$.

2) Calculer et présenter $\overrightarrow{F_{q_1Q_1}}$
3) Calculer et présenter $\overrightarrow{F_{q_2Q_1}}$
4) Calculer Q en fonction de q.

Chapitre 3

Champ électrique & Potentiel électrique

I. Champ électrique

Soit un ensemble de charges électriques **immobiles** $\{q_1, q_2, ...\}$, en les points de l'espace $\{p_1, p_2, ...\}$.
On place une petite charge ponctuelle q en un point M $\{\neq p_1, \neq p_2, ...\}$ de l'espace, les autres charges $\{q_1, q_2, ...\}$ restent immobiles ➔ la charge q subit une force $\vec{F}$.
On appelle ***vecteur champ électrique*** au point M, crée par l'ensemble initial de charges $\{q_1, q_2, ...\}$, le vecteur $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

I.1. Propriétés du champ électrique

- Le champ créé en un point M par une charge q fixe située en un point O est **un vecteur** porté par OM. Si $q > 0$, le champ a le même sens que OM. Il est donc dirigé **"centrifuge"**. Sinon le champ a bien sûr le sens contraire **"centripète"**.
- On peut associer un vecteur $\vec{E}$ à tout point de l'espace (sauf ceux occupés par une des charges initiales responsable du champ électrique)
- La notion de champ électrique n'a de sens que si le vecteur $\vec{E}$ est indépendant de la charge q qui sert à le définir et à le mesurer ➔ il faut que la présence de q ne modifie pas le système de charges initial → la charge q est appelée *charge test.*
- Comme le champ gravitationnel le champ électrique **a une portée infinie**.
- Le champ **n'est pas défini** pour $r = 0$.
- L'unité de champ électrique est : N/C *ou* V/m

I.2. Champ crée par une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle Q placée au centre du repère et supposée immobile.
Une petite charge q placée en M subit la force suivante :

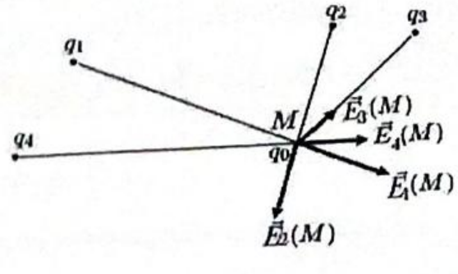
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{E}(au\,pt\,M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

Remarques :

- $\vec{E}$ ne dépend pas de q
- $\vec{E}$ est purement radial (sa grandeur est la même en tout point d'une sphère de rayon r dont le centre coïncide avec la charge Q).

I.3. Champ crée par un système de charges ponctuelles



Comme la force de Coulomb, le champ électrique obéit au principe de superposition. Dans le cas d'une distribution de charges ponctuelles, le champ total créé au point M est donc (principe de superposition) la somme de tous les champs créés par chacune des charges en ce point :

$$\vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u_i}}{r_i^2}$$

I.4. Champ crée par une distribution continue de charges

Nous appliquerons le principe de superposition à une distribution de charges D après l'avoir décomposée en un ensemble de fragments élémentaires chargés que nous assimilerons à des charges ponctuelles. Une partie élémentaire de la distribution D située au voisinage de P, et qui contient une charge dq crée un champ $\overrightarrow{dE}$ au voisinage du point M.

Le champ total créé en M par D est finalement obtenu par superposition des contributions de chacune de ses parties élémentaires selon :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_D \frac{dq}{r^2} \vec{u_r}$$

Il faut préciser l'élément d'intégration dq en fonction de la nature de la distribution considérée.

Distribution volumique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_D \frac{\rho(P) d\tau}{r^2} \vec{u_r}$$

Distribution surfacique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_D \frac{\sigma(P) dS}{r^2} \vec{u_r}$$

Distribution linéique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_D \frac{\lambda(P) dl}{r^2} \vec{u_r}$$

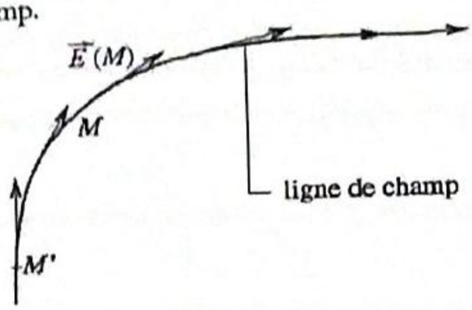
Les intégrales doivent porter sur des domaines **d'extension finie.**

I.5. Lignes de champs

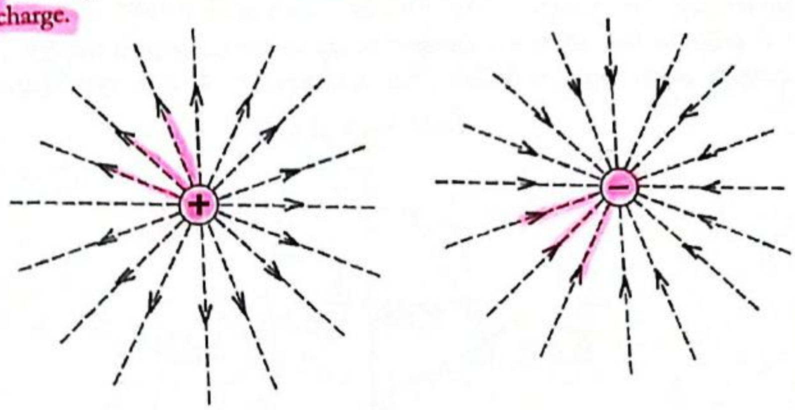
La présence de charges sources dans une région de l'espace modifie les propriétés électriques de celle-ci en créant, en chaque point M, un champ électrique. On introduit alors le concept de lignes de champ.

Le tracé de ces lignes donne une représentation spatiale du champ.

Une **ligne de champ** est une courbe **tangente** en chacun des points au vecteur champ et elle est orientée dans le sens du champ.



Exemple
La figure ci-dessous représente les lignes de champ dues à une seule charge source Q. Si celle-ci est positive (+) le champ est dirigé de la charge vers l'extérieur. Si la charge est négative (-), le champ est dirigé de l'extérieur vers la charge.

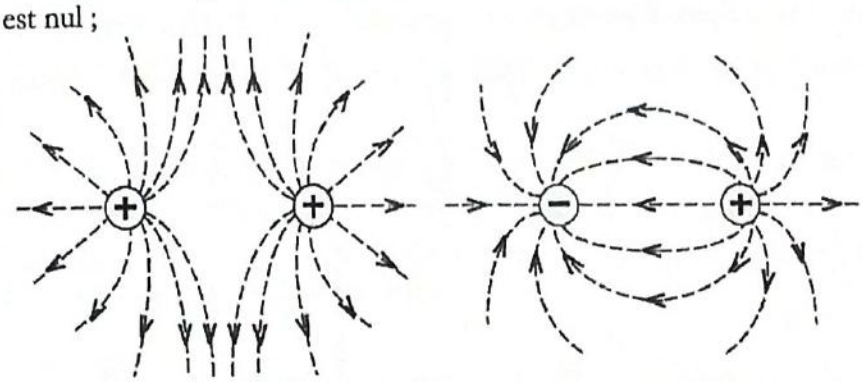


Propriétés de lignes de champ

- Les lignes du champ électrique ne se coupent jamais, car si, au contraire, deux lignes se coupent, le champ électrique est, au point d'intersection, tangent à deux lignes différentes ; ce qui est impossible !
- Les lignes de champ sont parallèles si le champ est uniforme ;
- Un élément de déplacement infinitésimal $\overrightarrow{dl}$ est parallèle au champ électrique $\overrightarrow{dE}$ ➔ l'équation d'une ligne de champ :

$$\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{dE} = \vec{0}$$

- Entre deux charges électriques de même signe, il existe toujours un point où le champ électrique est nul ;



- Les lignes se resserrent quand le champ augmente et inversement ;

II. Propriétés de symétrie du champ électrique

L'utilisation des symétries des distributions de charges permet de simplifier le calcul du champ électrostatique. L'utilisation des propriétés de symétrie du champ $\vec{E}$ permet dans bien des cas de déterminer les composantes du champ. L'exploitation des invariances de la distribution de de charges nous renseigne sur les variables dont dépendent les composantes de $\vec{E}$.

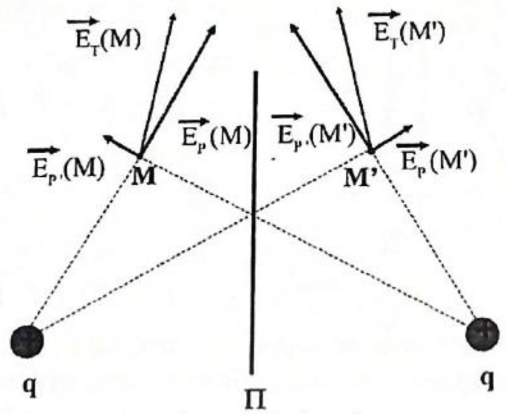
Principe de Curie

Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

II.1 Plan de symétrie de la distribution de charges

Soit une distribution de charges invariante par symétrie plane S par rapport à un plan π . Pour illustrer ce cas, nous prenons deux charges q placées en P et P', où P' est le symétrique de P par rapport au plan π . Soit M' le symétrique du point M par rapport au plan π (M' = $S_{/\pi}$ (M)). On peut constater sur la figure ci-dessous que le champ en M' est le symétrique du champ en M :

$$\vec{E}(M') = S_{/\pi}(\vec{E}(M))$$

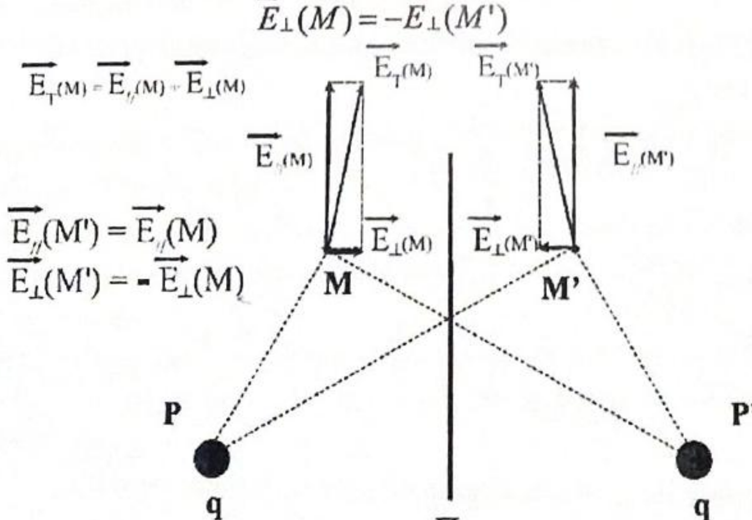


Plan de symétrie plane π

On remarque que les composantes du champ parallèles au plan de symétrie sont conservées alors que celles perpendiculaires au plan sont inversées :

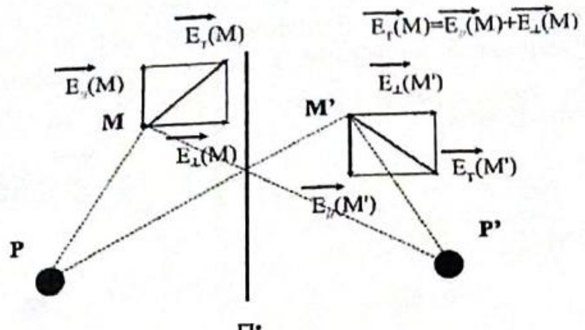
$$\vec{E}_{\parallel}(M) = \vec{E}_{\parallel}(M')$$

$$\vec{E}_{\perp}(M) = -\vec{E}_{\perp}(M')$$

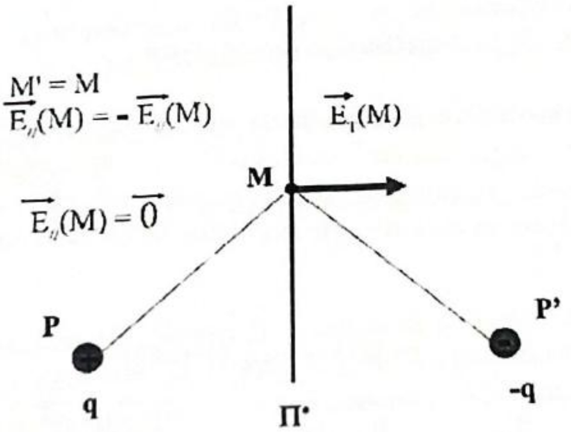


Transformation des composantes du champ par opération de symétrie plane

$$\vec{E}_{\parallel}(M) = -\vec{E}_{\parallel}(M')$$
$$\vec{E}_{\perp}(M) = \vec{E}_{\perp}(M')$$



Conséquence : En plaçant M sur le plan antimiroir π^* (M=M') de la figure ci-dessous, on obtient $\vec{E}_{\parallel}(M) = \vec{0}$. Le champ $\vec{E}$ est donc perpendiculaire au plan π^* en tout point de ce plan.



$$\vec{E}_T(M) \perp \Pi^*$$

II.3. Conséquences

Lors d'une opération de symétries appliquées à la distribution de charges, le champ électrique subit la même opération. Ce vecteur a les mêmes propriétés de symétrie que ses sources.

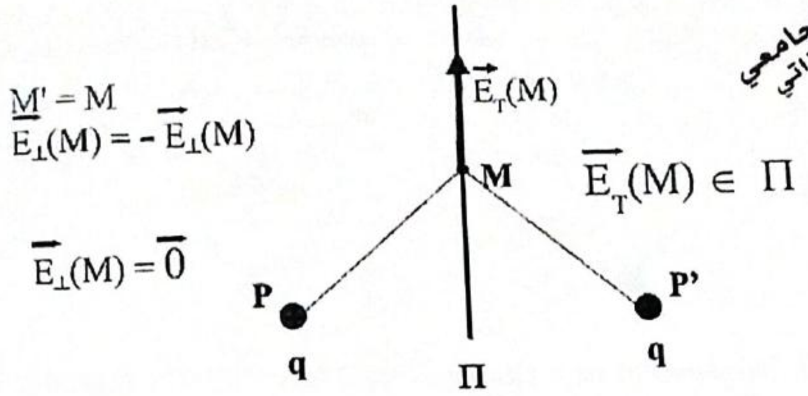
Les plans de symétrie et d'antisymétrie nous permettent souvent de trouver la direction du champ en un point M. Pour trouver la direction du champ $\vec{E}$ en un point M, il suffit de trouver :

- Soit deux plans de symétrie passant par M. Le champ $\vec{E}$ appartenant à ces deux plans, il est porté par la droite formée par leur intersection.
- Soit un plan d'antisymétrie passant par M. La direction du champ $\vec{E}$ au point M est donnée par la normale au plan d'antisymétrie.

Les plans de symétrie ou d'antisymétrie permettent d'obtenir les composantes du champ $\vec{E}$. Les variables dont dépendent ces composantes sont obtenues en étudiant les invariances de la distribution de charges

Conséquence

En plaçant M sur le plan miroir $\pi(M = M')$, on obtient $\vec{E}_{\perp}(M) = \vec{0}$. Le champ $\vec{E}$ est donc parallèle au plan π, en tout point de ce plan.

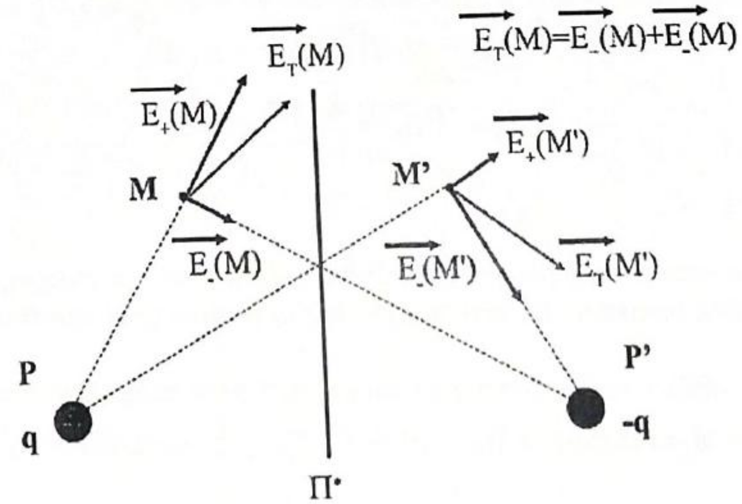


Champ $\vec{E}$ sur un plan de symétrie π

II.2. Plan d'antisymétrie de la distribution de charges

Soit π^* un plan d'antisymétrie de la distribution de charges. Pour illustrer ce cas, nous prenons deux charges q et $-$q placées en P et P', où P' est le symétrique de P par rapport au plan π^*. Soit M' le symétrique du point M par rapport au plan π^* (M' = $S_{/}\pi^*$ (M)).
On peut constater sur la figure ci-dessous que le champ en M' est l'opposé du symétrique du champ en M :

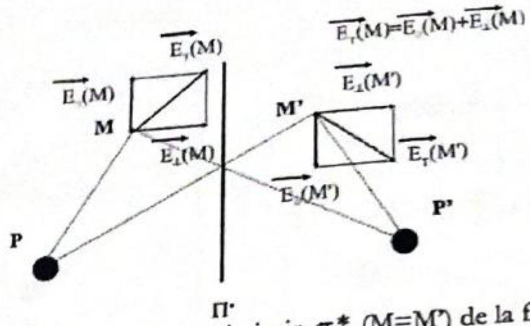
$$\vec{E}(M') = -S_{/\pi^*}(\vec{E}(M))$$



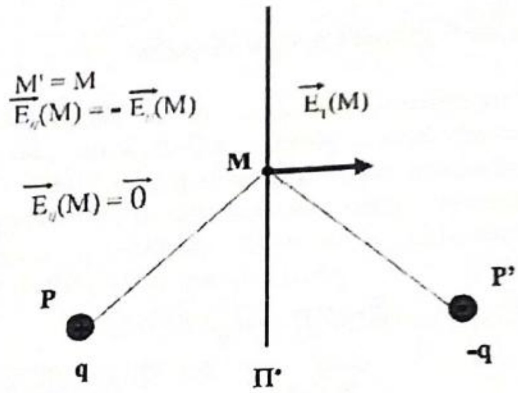
Plan d'antisymétrie plane π^*

A l'inverse du cas précédent, on remarque sur la figure ci-dessous que les composantes du champ parallèles au plan d'antisymétrie π^* sont opposées alors que celles perpendiculaires au plan π^* sont conservées :

$$\vec{E}_{\parallel}(M) = -\vec{E}_{\parallel}(M')$$
$$\vec{E}_{\perp}(M) = \vec{E}_{\perp}(M')$$



Conséquence : En plaçant M sur le plan antimiroir π^* (M=M') de la figure ci-dessous, on obtient $\vec{E}_{\parallel}(M) = \vec{0}$. Le champ $\vec{E}$ est donc perpendiculaire au plan π^* en tout point de ce plan.



$\vec{E}_T(M) \perp \Pi^*$

II.3. Conséquences

Lors d'une opération de symétries appliquées à la distribution de charges, le champ électrique subit la même opération. Ce vecteur a les mêmes propriétés de symétrie que ses sources.

Les plans de symétrie et d'antisymétrie nous permettent souvent de trouver la direction du champ en un point M. Pour trouver la direction du champ $\vec{E}$ en un point M, il suffit de trouver :

- Soit deux plans de symétrie passant par M. Le champ $\vec{E}$ appartenant à ces deux plans, il est porté par la droite formée par leur intersection.
- Soit un plan d'antisymétrie passant par M. La direction du champ $\vec{E}$ au point M est donnée par la normale au plan d'antisymétrie.

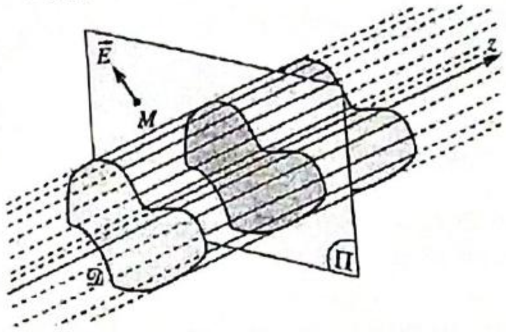
Les plans de symétrie ou d'antisymétrie permettent d'obtenir les composantes du champ $\vec{E}$. Les variables dont dépendent ces composantes sont obtenues en étudiant les invariances de la distribution de charges autour du pt M

II.4. Cas particulier

Invariance par translation

Considérons la distribution de charges de la figure ci-dessous. Celle-ci est invariante par translation selon l'axe Oz. Tout plan perpendiculaire à l'axe OZ est un plan de symétrie de la distribution de charges. Le champ en un point M est donc contenu dans le plan passant par M :

$$E(x,y,z) = E_x(x,y,z)\overrightarrow{e_x} + E_y(x,y,z)\overrightarrow{e_y}$$



Champ $\vec{E}$ créé par une distribution de charges invariante par translation selon Oz

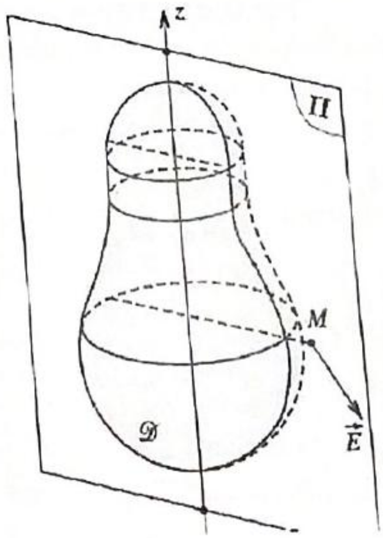
Par ailleurs, la distribution étant invariante par translation selon l'axe Oz, les composantes du champ ne dépendent que de x et y :

$$E(x,y,z) = E_x(x,y)\overrightarrow{e_x} + E_y(x,y)\overrightarrow{e_y}$$

Invariance par rotation

Considérons la distribution de charges de la figure ci-dessous. Celle-ci est invariante par rotation autour l'axe Oz. Tout plan contenant l'axe OZ est un plan de symétrie de la distribution de charges. Le champ en un point M est donc contenu dans le plan passant par M :

$$E(r,\theta,z) = E_r(r,\theta,z)\overrightarrow{e_r} + E_z(r,\theta,z)\overrightarrow{e_z}$$



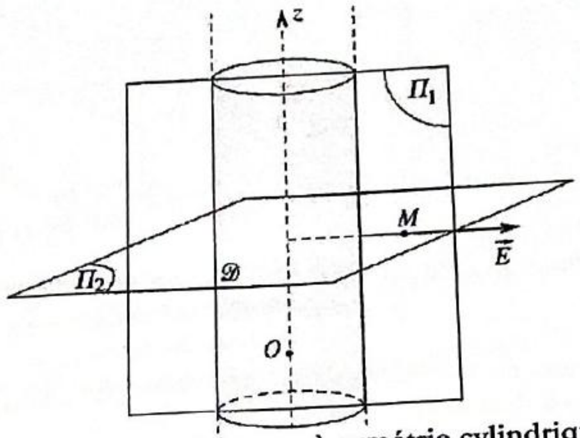
Par ailleurs, la distribution étant invariante par rotation selon θ, les composantes du champ ne dépendent que de r et z :

$$\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r,z)\overrightarrow{e_r} + E_z(r,z)\overrightarrow{e_z}$$

Exemples :

1. *Champ créé par la distribution à symétrie cylindrique :*
La distribution à symétrie cylindrique représentée sur la figure ci-dessous est invariante par translation selon un axe Oz et par rotation autour de cet axe. Les plans contenant l'axe Oz et perpendiculaires à l'axe Oz sont des plans de symétrie de la distribution de charges. On obtient dans le système de coordonnées cylindriques
$\rho(r,\theta,z)=\rho(r)$ donc :

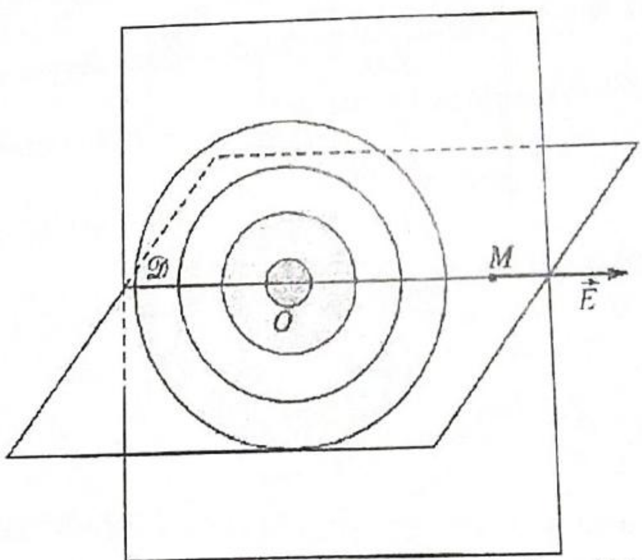
$$\vec{E}(r,\theta,z)=E_r(r)\vec{e_r}$$



Distribution de charges à symétrie cylindrique

2. *Champ créé par la distribution à symétrie sphérique :*
La distribution à symétrie sphérique représentée sur la figure ci-dessous est invariante par rotation autour de tout axe passant par le centre de symétrie O. Tout plan contenant le centre de symétrie est un plan de symétrie de la distribution de charges. On obtient dans le système de coordonnées sphérique $\rho(r,\theta,\varphi)=\rho(r)$, donc

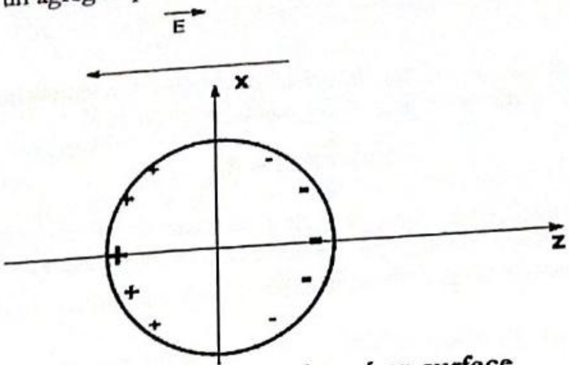
$$\vec{E}(r,\theta,\varphi)=E_r(r)\vec{e_r}$$



Distribution de charges à symétrie sphérique

CP : AP1, 2018-2019

3. Champ créé par un agrégat sphérique chargé en surface



Agrégat sphérique chargé en surface

Soit l'agrégat sphérique de charges en surface. Le plan (xOy) est un plan d'antisymétrie alors que tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie de la distribution de charges. La distribution de charges est invariante par rotation selon φ.
Soit $M(r,\theta,\varphi)$, le champ en M appartient au plan de symétrie passant par l'axe Oz et contenant le point M :

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E_r(r,\theta)\vec{e_r} + E_\theta(r,\theta)\vec{e_\theta}$$

III. Potentiel électrique

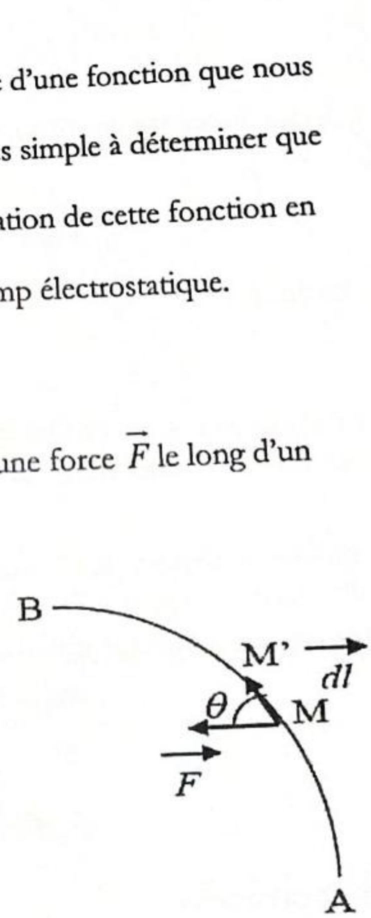
III.1 Introduction

Le champ électrique peut être caractérisé simplement à l'aide d'une fonction que nous appellerons potentiel électrique. Cette fonction scalaire est souvent plus simple à déterminer que le champ électrostatique. Cette appellation sera justifiée par l'interprétation de cette fonction en termes d'énergie potentielle d'une charge soumise aux effets d'un champ électrostatique.

III.2 Circulation d'un champ de vecteur

En mécanique, nous avons défini le travail élémentaire dW d'une force $\vec{F}$ le long d'un trajet infiniment petit $\overrightarrow{MM'} = \vec{dl}$ par le produit scalaire :

$$dW = \vec{F}.\vec{dl} = F\,dl\cos\theta$$



Lorsque le trajet AB n'est plus un infiniment petit, le travail W de la force $\vec{F}$ entre deux points A et B, est égal à la somme des travaux élémentaires dW.
A la limite, on passe à l'intégrale :

$$W = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl}$$

Dans le cas de la pesanteur, on sait que le travail ne dépend pas du chemin suivi et ne dépend que des valeurs de l'énergie potentielle E_{PA} et E_{PB} mesurées en A et B.

$$W = \int_A^B \vec{P}.\vec{dl} = E_{PA} - E_{PB}$$

Par conséquent, le travail de cette force, le long d'un trajet fermé, est nul. La notion de travail W, qui concerne les forces, peut être étendue à tous les vecteurs en introduisant la notion de "*circulation*" C d'un vecteur le long d'un trajet AB.

La circulation élémentaire dC d'un vecteur :

$$\vec{A} = A_x\vec{e_x} + A_y\vec{e_y} + A_z\vec{e_z}$$

au cours d'un déplacement infiniment petit $\vec{dl}$ est définie par le produit scalaire :

$$dC = \vec{A}.\vec{dl}$$

Lors d'un déplacement entre deux points A et B éloignés, on passe à l'intégrale :

$$C = \int_A^B \vec{A}.\vec{dl}$$

III.3 Définition du potentiel électrique

Considérons une courbe quelconque reliant 2 points A et B. **La circulation** du champ électrique $\vec{E}$ sur cette courbe est la quantité scalaire définie par :

$$C_{A-B} = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl}$$

Etant donné que le champ électrique est créé par une charge ponctuelle on a :

$$C_{A-B} = \int_A^B \vec{E}.d\vec{M} = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = \int_A^B Edr = \int_A^B \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[-\frac{1}{r}]_A^B$$

Et donc

$$C_{A-B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}) = V(r_A) - V(r_B)$$

La circulation C est en fait **indépendante du chemin suivi** pour aller de A à B. On définit ainsi une fonction scalaire qui est **le potentiel électrique** :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r} + cte$$

Revenons maintenant sur l'expression de la circulation pour écrire :

$$dC = \vec{E}.\vec{dl} = -dV$$

=>

$$E_x.dx + E_y.dy + E_z.dz = -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

On conclut que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

Remarques:

- On note que $\lim_{r\to\infty} V(r) = cte$, en l'absence de charges à l'infini, on choisit $cte = 0$, le potentiel électrique s'annule ainsi à l'infini : $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}$
- Le potentiel électrique s'exprime en **Volt** (V).
- La circulation du champ électrique sur une **courbe fermée est nulle**

III.4. Potentiel électrique créés par les distributions de charges

III.4.1. Ensemble de charges ponctuelles

Comme dans le cas du potentiel créé par une charge ponctuelle, on calcul la aussi la circulation du champ électrique :

$$\begin{aligned} dV &= -dC = -\vec{E}.\vec{dl} = -\vec{E}.d\vec{M} \\ &= -(\sum_i \vec{E}_i).d\vec{M} = -(\sum_i \vec{E}_i.d\vec{M}) = -(\sum_i dC_i) \\ &= \sum_i dV_i \end{aligned}$$

En l'absence de charge à l'infini on a :

$$V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{r_i}$$

III.4.2. Distribution continue de charges

On peut en déduire facilement les expressions du potentiel électrique :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho d\tau}{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma dS}{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda dl}{r}$$

Remarque

1. Le potentiel électrique est toujours défini à une constante près. Pour obtenir le champ électrique créé par une distribution de charges, il est préférable de calculer le potentiel électrique $V(\vec{r})$ lorsque cela est possible et de dériver en suite le champ électrique en utilisant la relation :

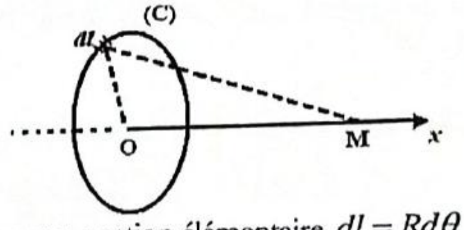
$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V(M)) = -\vec{\nabla}(V(M))$$

2. Dans le cas de distributions d'extension infinies (plan, fil...), ces intégrales ne convergent pas nécessairement. On calculera alors le champ électrique en premier lieu, et ensuite le potentiel V.

3. Un autre problème de convergence de l'intégrale apparaît si nous nous intéressons au calcul du potentiel en un point de la distribution. Dans le cas d'une distribution volumique, l'intégrale converge s'il n'y a pas de charges à l'infini. Si la distribution de charges est de taille finie, on peut poser V (∞) = 0 car il n'y a pas de charges à l'infini. Ceci permet d'annuler la constante d'intégration. En revanche, du fait de la présence de charges à l'infini, il n'est plus possible de poser V (∞) = 0 si la distribution est de taille infinie.

Exemple :

On considère un anneau de rayon R de centre O et d'axe Ox, portant une densité linéique de charge uniforme λ. On cherche à déterminer le potentiel V(x) en tout point de l'axe Ox.



Le potentiel élémentaire dV(x) créé par une portion élémentaire $dl = Rd\theta$ est

$$dV(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dl}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

On déduit par intégration le potentiel V(x) en tout point de l'axe :

$$V(x) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} + Cte$$

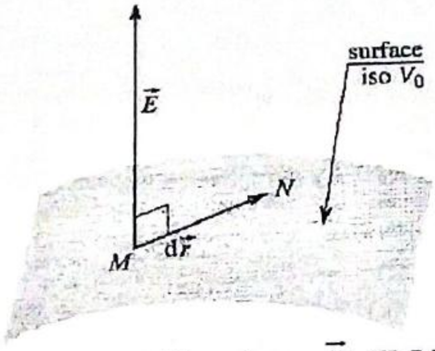
IV. Surfaces équipotentiels

On appelle surface équipotentielle, une surface S dont tous les points sont au même potentiel V (V=cte).
Deux surfaces équipotentielles correspondant à des potentiels distincts ne peuvent avoir d'intersection.

Exemples :
- Charge ponctuelle : $V(r) = V_0$ ➔ r = Cte. Les surfaces équipotentielles sont des sphères ayant la charge pour centre.
- Fil rectiligne infini uniformément chargé : $V(r) = V_0$ ➔ r = Cte. Les surfaces équipotentielles sont des cylindres ayant pour axe le fil chargé.

IV.1. Surfaces équipotentiels et lignes de champ

- Considérons la surface équipotentielle de la figure ci-dessous de potentiel V_0 ; M et N sont deux points très proches de cette surface. N est obtenu à partir de M par un déplacement élémentaire $d\vec{r}$.



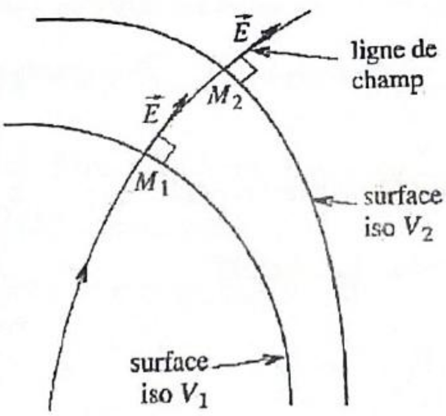
Surface équipotentielle V_0 et champ $\vec{E}$ $(V(M) = V(N))$

Le vecteur $d\vec{r}$ est contenu dans le plan tangent en M à la surface équipotentielle. Par définition du potentiel, $V(N) = V(M) - \vec{E}d\vec{r}$. La surface considérée étant une surface équipotentielle, on a $V(N) = V(M)$. On en déduit que $\vec{E}d\vec{r} = 0$ et que le champ électrique en M est normal à la surface équipotentielle. Plus généralement, une surface définie par $f(\vec{r}) = Cte$ admet le vecteur $\nabla f(\vec{r})$ comme vecteur normal.

- Soit une ligne de champ traversant deux surfaces équipotentielles de potentiels V_1 et V_2 aux points M_1 et M_2 (figure ci-dessous). Supposons que le champ $\vec{E}$ soit orienté de M_1 vers M_2. La définition du potentiel nous permet d'écrire :

$$V_2 - V_1 = V(M_2) - V(M_1) = \int_{M_1}^{M_2} -\vec{E}.\vec{dr} < 0$$

On a donc $V_2 < V_1$. Le champ est donc orienté du potentiel le plus élevé vers le potentiel le moins élevé.

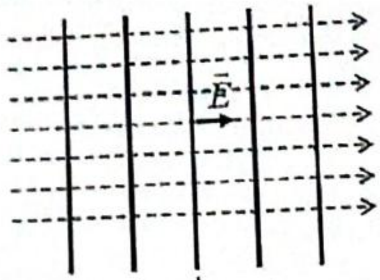


$\vec{E}$ est orienté dans le sens des potentiels décroissants

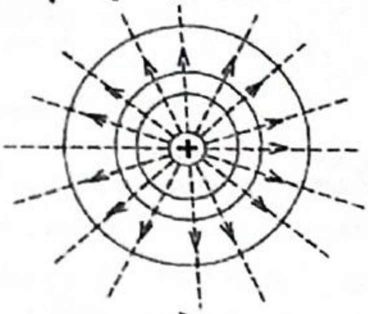
Conséquence

Le champ électrique est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles et les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

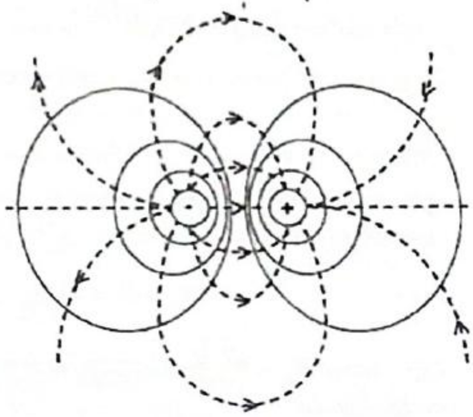
Exemples



Dans le cas d'un champ uniforme les lignes de champ sont des droites parallèles et les surfaces équipotentielles sont des plans perpendiculaires à ces droites.



Dans le cas d'une charge ponctuelle, les surfaces équipotentielles sont des sphères concentriques de centre O et les lignes de champ sont radiales.

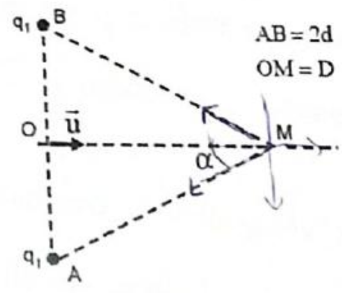


Dans le cas de deux charges électriques égales et opposées : les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

V. Exercice d'application

Exercice II.1.

Soient 2 charges électriques q_1, localisés dans les points A et B.
Calculer le champ électrique crée par A et B en M



Exercice II.2.

Calculer le champ et le potentiel créés par une charge Q, portée par un disque plein de faible épaisseur, en un point M sur l'axe oz.
La charge est uniformément répartie sur le disque. σ représente la densité de charge superficielle

Exercice II.3.
Soit un fil de longueur infini, porte des charges uniformément réparties avec une densité $\lambda > 0$.

1. Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ au point M situé a une distance x du fil.
2. En déduire le potentiel $V(x)$ en M, on prend $V = 0$ pour $x = 1$.
3. Tracer V en fonction de x.

Exercice II.4.
Soit un segment AB uniformément chargé avec une densité linéique ($\lambda > 0$), on désigne par O le milieu du segment.

1. Quelle est la charge totale Q porté par le segment.
2. Calculer le champ $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution en point M situé a une distance a de O avec $|\overrightarrow{OM}| = a = Cte$.
3. Que devient ce champ si M est très éloigné du segment AB ($a >> L$).

Exercice II.5.
Soit un demi-cercle (C, D) de centre O et de rayon R uniformément chargé avec une densité de charge linéique constante et positive λ. Soit q une charge placée au point B tel que $OB = R$.

1. (a) Calculer le potentiel électrostatique $V_1(O)$ crée par le demi-cercle chargé (C, D) au point O.
   (b) Calculer le potentiel électrostatique $V_2(O)$ crée par la charge q au point O.
   (c) Déduire le potentiel total $V(O)$ crée au point O.
2. (a) Calculer le champ électrostatique $\vec{E_1}(O)$ crée par le demi-cercle chargé (C, D) au point O.
   (b) Calculer le champ électrostatique $\vec{E_2}(O)$ crée par la charge q au point O.
   (c) Déduire le champ total $\vec{E}(O)$ crée au point O.
   (d) Déterminer la relation entre λ et q pour $\vec{E}(O) = \vec{0}$.

Chapitre 4

Théorème de Gauss

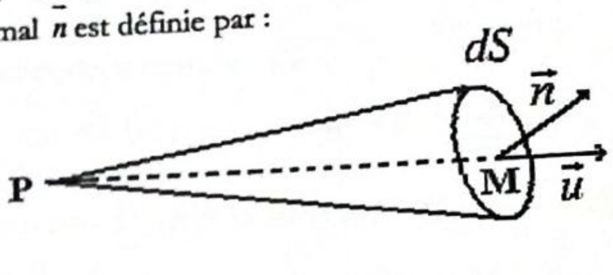
Le calcul du champ électrique créé par une distribution de charges repose sur un calcul **d'intégrale souvent laborieux (difficile).** Nous allons voir ici **une méthode due à Carl Friedrich Gauss** qui, dans un grand nombre de cas, **facilite** le calcul du champ et donc également celui du potentiel.

I. Flux du champ électrique

I.1. Notion d'angle solide

L'angle solide élémentaire noté $d\Omega$ sous lequel, depuis un point P, on voit **l'élément de surface** dS entourant un point M, d'unitaire normal $\vec{n}$ est définie par :

$$d\Omega = \frac{\vec{u}.\vec{n}}{r^2}.dS$$



r est la distance entre les deux points P et M.
Ainsi l'angle solide Ω sous lequel, depuis P, on voit la surface (Σ) est :

$$\Omega = \iint_{\Sigma} d\Omega = \iint_{\Sigma} \frac{\vec{u}.\vec{n}}{r^2}.dS$$

L'angle solide est exprimé en **stéradian** noté **(sr)**

Conséquence

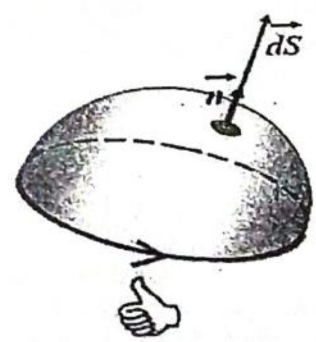
L'angle solide sous lequel, depuis P, centre de la sphère, on voit **tout l'espace** est :

$$\Omega = 4\pi \; stéradians$$

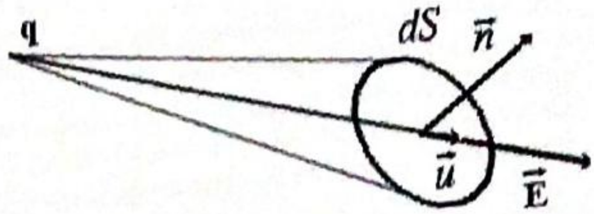
D'une façon générale, d'un point intérieur à une surface fermée (Σ) quelconque, on voit la surface (ou l'ensemble de l'espace) sous l'angle solide $\Omega = 4\pi\,(sr)$

Remarque : Orientation de la normale

On oriente la normale d'une surface fermée de l'intérieur vers l'extérieur.
Pour une surface ouverte, on choisit un sens de parcours du contour et on oriente la normale en utilisant par exemple la règle de la main droite. Le pouce donne le sens de la normale si les autres doigts sont fermés dans le sens de parcours du contour.



I.2. Flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle



Le flux élémentaire du champ $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle q est par définition :

$$d\phi = \vec{E}.\vec{n}\,dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\vec{u}.\vec{n}}{r^2}dS$$

soit :

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.d\Omega$$

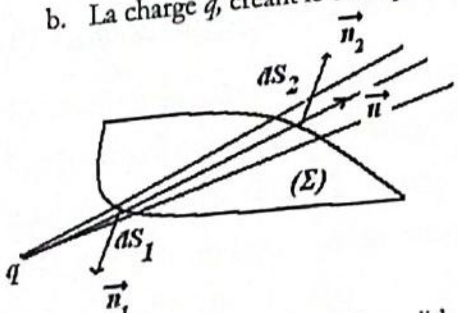
Le flux ne **dépend** que de **l'angle solide** sous lequel est vue l'élément de surface dS.

A travers une surface finie (Σ) :

$$\Phi = \iint d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{\Sigma} d\Omega \Rightarrow \Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\Omega$$

Si la surface (Σ) est une surface fermée, deux cas sont à envisagé :

- Si la surface (Σ) est une surface fermée, deux cas sont à envisagé :
  a. La charge q, créant le champ est à **l'intérieur de la surface** (Σ) Ω vaut alors 4π et donc : $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$
  b. La charge q, créant le champ est à **l'extérieure de la surface** (Σ)



à travers $dS_1(\vec{n}_1)$ nous avons : $d\phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.d\Omega_1$

et à travers $dS_2(\vec{n}_2)$ nous avons : $d\phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.d\Omega_2$

or $d\Omega_1 + d\Omega_2 = 0$ on en déduit $d\phi_1 + d\phi_2 = 0$

En balayant l'ensemble des angles solides on obtient par sommation **un flux total nul.**

Conclusion

Le flux du champ créé par une charge q à travers une surface fermée (Σ) est :

q intérieur à (Σ)	*q extérieur à* (Σ)
$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$	$\Phi = 0$

II. Théorème de Gauss

<u>***Enonce du théorème :***</u>

Le flux sortant du champ électrique *d'une distribution de charges à travers une* ***<u>surface fermée</u>*** *orientée quelconque est égal, dans le vide, à la somme des* ***charges électriques contenue <u>à l'intérieur</u>*** *de cette surface divisée par* ε_0

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

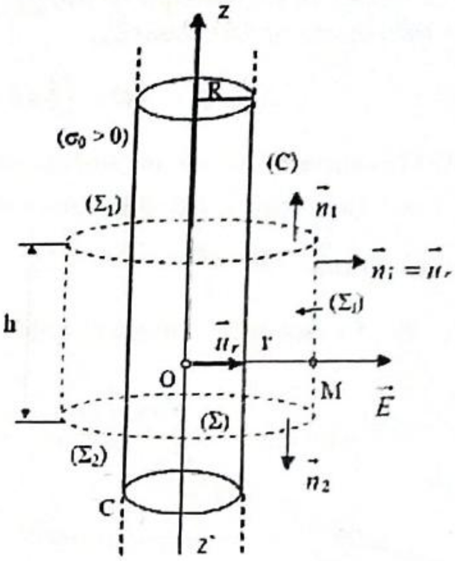
Carl Friedrich Gauss
1777-1855

Le théorème fournit une méthode très utile pour calculer le champ E lorsque celui-ci possède des propriétés de symétrie particulières.
Celles-ci doivent en effet permettre de calculer facilement le flux ϕ . Comme le théorème de Gauss est valable pour une surface quelconque, il nous suffit de trouver une surface S adaptée respectant les propriétés de symétrie du champ, appelée **surface de Gauss.**

III. Applications

III.1. Champ créé par un cylindre infini uniformément chargé en surface

Considérons un cylindre infini de rayon R et portant une charge électrique σ uniforme par unité de surface. Pour utiliser le théorème Gauss, il faut d'abord connaître les propriétés de symétrie du champ $\vec{E}$.
Nous avons une symétrie cylindrique, donc le champ est radial : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$



La surface de Gauss la plus adaptée est un cylindre de rayon r et de hauteur h.

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \oiint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E}.d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}.d\vec{S} + \iint_{\Sigma_l} \vec{E}.d\vec{S}$$

$$= 0 + 0 + \iint_{\Sigma_l} Erd\theta dz$$

$$= 2\pi rhE$$

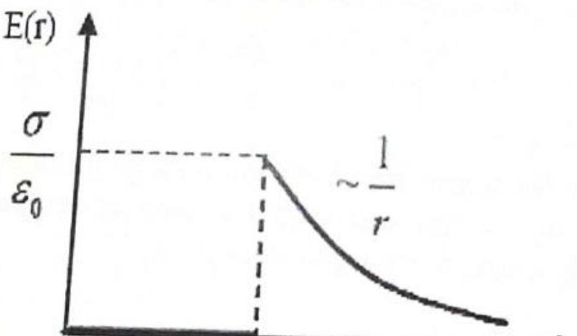
Théorème de Gauss ➔ $2\pi rhE = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Pour **r > R** ➔ $Q_{\text{int}} = \iint \sigma dS = 2\pi Rh\sigma$

$$\vec{E}(r > R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}\frac{1}{r}\vec{u}_r$$

Pour **r < R** ➔ $Q_{\text{int}} = 0$

$$\vec{E}(r < R) = \vec{0}$$



Champ électrique créé par un cylindre infini

<u>Le potentiel associé</u>

$$E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V(r) = -\int E(r)dr$$

Pour r ≥ R

$$V(r \geq R) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r} = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r) + Const_1$$

A $r = r_0$ ($r_0 > R$ distance finie de l'axe du cylindre)

$$V(r_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Const_1 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r_0)$$

D'où

$$V(r \geq R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r_0 / r)$$

Pour **r ≤ R :** $V(r \leq R) = Const_2$

La constante est déterminée par continuité du potentiel en r=R :

$$V(r \geq R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r_0 / R)$$

III.2. Champ créé par un plan infini uniformément chargé

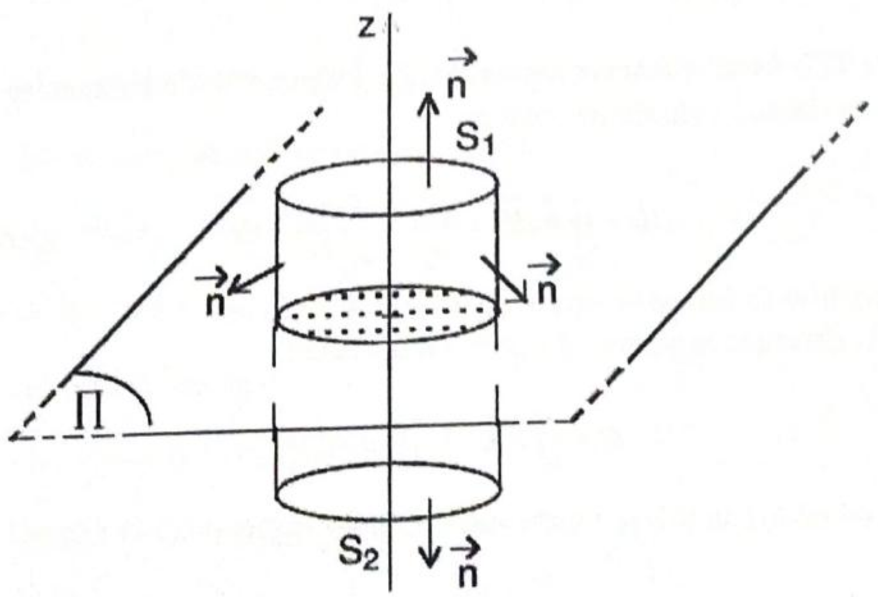
Considérons un plan infini (Π) portant une charge électrique σ uniforme par unité de surface.

Les propriétés de symétrie du champ $\vec{E}$: tous les plans perpendiculaires au plan infini (Π) sont plans de symétrie de celui-ci. Le champ $\vec{E}$ est donc perpendiculaire à (Π)

Si le plan (Π) est repéré par les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$, l'invariance par translation suivant les $\vec{i}$ et $\vec{j}$ fournit $\vec{E} = E(z)\vec{k}$

Mais le plan (Π) est lui-même un plan de symétrie physique alors le champ électrique est **impaire :** $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$

Etant donné ces propriétés de symétrie, la surface de Gauss la plus adaptée est un cylindre de sections perpendiculaires au plan et situées à des hauteurs symétriques.



$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \oiint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}.d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E}.d\vec{S} + \iint_{S_L} \vec{E}.d\vec{S} = E(z).S + E(-z).S + 0$$

$$= 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

Il s'ensuit que le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé vaut :

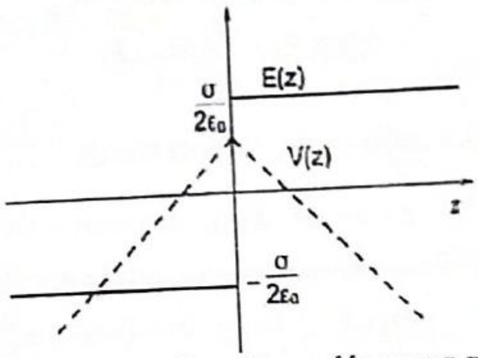
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Le potentiel associé

$$E(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow V(z) = -\int E(z)dr$$

D'où :

$$V(z) = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z + Const.$$



Potentiel et champ électrique créés par un plan infini

Remarque : Continuité du champ et du potentiel

On montre que le champ électrique $\vec{E}$ *et le potentiel* V **sont toujours continus** **hors des régions électrisées ou dans une répartition en volume.**

Le potentiel **V est continu à la traversée d'une surface électrisée** *en revanche* **le champ électrique est discontinu** *et subi un saut qui vaut :* $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

IV. Loi locale et loi intégrale

Soit une surface (S) fermée, contenant une charge Q répartie uniformément dans le volume τ qu'elle entoure, la densité volumique étant ρ.

On a alors :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_\tau \rho\, d\tau$$

Cette écriture constitue la forme intégrale du théorème de Gauss.

Le théorème de la divergence permet d'écrire par ailleurs :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \iiint_\tau div\vec{E}\, d\tau$$

De ces relations, on déduit la forme locale suivante pour le théorème de Gauss :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Cette deuxième loi locale de l'électrostatique (comme la première $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ ou $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}$) présente un caractère général, elle ne fait intervenir que le point considéré indépendamment de toute symétrie globale.

V. Equations de Poisson et de la Place

En présence d'une densité volumique de charge, on peut écrire les deux lois locales :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \\ div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow div(-\overrightarrow{grad}(V)) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Or $div(-\overrightarrow{grad}(V)) = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \Delta$. On en déduit l'équation de Poisson

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Et dans le vide on déduit l'équation de la Place

$$\Delta V = 0$$

VI. Exercice d'application

Exercice III.1

Soit un cylindre de rayon R chargé non uniformément avec une densité volumique de charge qui croit à partir de son axe $(Z'Z)$ suivant la loi $\rho = \rho_0\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)$ avec $\rho_0 = cte > 0$.

1)- Calculer la charge totale Q pour une hauteur h.

2)- Calculer $E(r)$ en M dans les cas : $r<R$ et $r>R$.

3)- Déduire $V(r)$ en M dans les cas : $r<R$ et $r>R$. On donne $V(r=0)=0$.

Exercice III.2

Soit l'espace compris entre 2 sphères de centre O et de rayons a et b avec $(b>a)$. Cet espace est chargé uniformément avec une densité volumique $\rho>0$.

1)- Calculer la charge totale Q du système

2)- Quelles sont les invariances du système

3)- Quelle est la symétrie du système

4)- Calculer $E(r)$ en tout point de l'espace.

3)- Déduire $V(r)$ en tout point de l'espace.